نظري

S.P 25

8

01

05/10/2015

الخواص الهندسية للمنحني والمستوي في الفراغ

د. منير الترك

رياضيات 3

المقرر المطلوب بمادة الرياضيات 3

1. الهندسة التحليلية الفراغية
2. التكامل الثنائي بأشكاله (ديكارتيا، وسيطيا ،التكامل القطبي)
3. التكامل الثلاثي، التكامل السطحي، التكامل الخطي
4. التحليل الشعاعي

المنحني في الفراغ: هو عبارة عن تقاطع سطحين

$$\Gamma = \begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

كما يمكن أن يعطى المنحني بالفراغ بمعادلاته الوسيطية:

$$\Gamma = \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$$

نسمي الشعاع $\vec{r}$ الذي يعطى بالعلاقة:

$\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ براسم خط المنحني

- إذا كان الوسيط t من الدرجة الأولى فان معادة المحني تمثل مستقيم والا فالمنحني فراغي
- نقول عن المنحني أنه مغلق إذا كانت بدايته تنطبق على نهايته

تعريف النقطة الشاذة:

نسمي النقطة $n_0(x_0, y_0, z_0)$ بأنها نقطة شاذة من المنحني Γ إذا تحققت وكانت المشتقات الجزئية للمعادلة التي تمثل هذا المنحني معدومة معا أو غير موجودة

$$\dot{x}(t) = 0 \quad , \quad \dot{y}(t) = 0 \quad , \dot{z}(t) = 0$$

تعريف المنحني الأملس أو الصقيل:

نقول عن المنحني أنه أملس (صقيل) إذا كان يملك في كل نقطة من نقاطه مماس وحيد ولا يوجد عليه نقاط تكرار ولا يوجد عليه نقطة شاذة

ونقول عن منحني يوجد عليه نقطة شاذة أنه أملس ماعدا تلك النقطة

أما تحليليا فإننا نعبر عن المنحني الصقيل بثلاثة شروط:

a) وجود المشتقات الجزئية الأولى للمنحني المعطى بالشكل بمعنى اخر نقول ان المنحني rمستمر حيث ان:

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$$

b) عندما يكون لدينا قيمتين للوسيط t نعرف ما يدعى شرط التكرار:

$$t_1 \neq t_2 \implies r(t_1) \neq r(t_2)$$
$$t_1 = t_2 \implies r(t_1) = r(t_2)$$

c) $\dot{r}(t) \neq 0$

هذه الشروط التي تعطي للمنحني الذي معادلته معطاة بالشكل الوسيطي أما إذا كان المنحني معطى بشكل ديكارتي أي عبارة عن تقاطع سطحين:

$$\Gamma \equiv \begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

فان شرط المنحني الاملس هو ان يكون المحدد اليعقوبي (الجاكوبيان):

$$J = \frac{d(f_1, f_2)}{d(x, y)} \neq 0$$

أي:

$$\begin{vmatrix} \frac{d(f_1)}{dx} & \frac{d(f_2)}{dx} \\ \frac{d(f_1)}{dy} & \frac{d(f_2)}{dy} \end{vmatrix} = 0$$

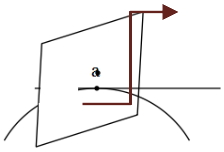
إذا كان المنحني صقيل فيوجد في كل نقطة من نقاطه مماس وحيد نسمي هذا المماس **المستقيم المماس** للمنحني في تلك النقطة

كمان يعطى شعاع واحدة المماس $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = 1$

لنكتب الان معادلات المستقيم المماس للمنحني في نقطة منه ولتكن: $P(x_0, y_0, z_0)$

يجب أن تكون هذه النقطة غير شاذة ونكتب المعادلات على الشكل التالي:

$$\frac{x - x_0}{\dot{x}_p} = \frac{y - y_0}{\dot{y}_p} = \frac{z - z_0}{\dot{z}_p}$$



كما نسمي المستوي الذي يمر بالنقطة ال عادية P(أي غير شاذة) والعمودي على المستقيم المماس ب المستوي الناظم للمنحني وهذا المستوي يحوي جميع المستقيمات العمودية على المماس

تعطى معادلة المستوي الناظم:

$$\dot{x}_p(x - x_0) + \dot{y}_p(y - y_0) + \dot{z}_p(z - z_0) = 0$$

مثال:

ليكن لدينا Γ المنحني المعطى بالمعادلات الوسيطية التالية:

$$\Gamma = \begin{cases} x = a\cos(t) \\ y = a\sin(t) \\ bt \end{cases}$$

برهن أن المنحني Γ منحني أملس ثم أوجد معادلات المستقيم المماس ومعادلة المستوي الناظم لهذا المنحني في النقطة الموافقة $t = \frac{\pi}{4}$

الحل

نلاحظ أن المعادلات الممثلة لهذا المنحني هي عبارة عن معادلات ذات توابع مثلثية حيث أن b،a عبارة عن ثوابت ونعلم أن التوابع المثلثية معرفة ومستمرة من أجل جميع قيم t أما المشتقات لهذه التوابع فهي:

$$\dot{x} = -a\sin(t)$$
$$\dot{y} = a\cos(t)$$
$$\dot{z} = b$$

وان هذه المشتقات أيضا توابع مثلثية معرفة ومستمرة وموجودة (أي قابلة للاشتقاق) إذا الشرط الأول محقق

لنرى الشرط الثالث:

من أجل قيمة معينة ل t تجعل المشتقات الثلاثة تنعدم معا ولا يمكن أن نجد هذه النقطة فالشرط الثالث محقق

أما بالنسبة للشرط الثاني فنجد أنه إذا أخذنا نقطتين مختلفتين ل tوطابقنا المركبات الثلاثة ولنبدأ بالمركبة z أي يجب أن نبدل كل t في z مرة ب t_1ومرة ب t_2 وكذلك بالنسبة لباقي المركبات فنجد:

$$t_1 \neq t_2 \Longrightarrow bt_1 \neq bt_2$$ وهي محققة

بالنسبة ل x وy نجد: $t_1 \neq t_2 \Longrightarrow a\cos(t_1) \neq a\cos(t_2) \Longrightarrow \cos(t_1) \neq a\cos(t_2)$

عند النقطة $t = \frac{\pi}{4}$ نعوض في المعادلة ونجد:

$$t = \frac{\pi}{4} \begin{cases} x = \dfrac{a}{\sqrt{2}} \\ y = \dfrac{a}{\sqrt{2}} \\ z = b\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

أما المشتقات فنجد:

$$t = \frac{\pi}{4} \begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{a}{\sqrt{2}} \\ \dot{y} = \dfrac{a}{\sqrt{2}} \\ \dot{z} = b \end{cases}$$

لنكتب معادلات المستقيم المماس:

$$\frac{x - \frac{a}{\sqrt{2}}}{-\frac{a}{\sqrt{2}}} = \frac{y - \frac{a}{\sqrt{2}}}{\frac{a}{\sqrt{2}}} = \frac{z - b\frac{\pi}{4}}{b}$$

أما معادلة مستوي الناظم في:

$$-\frac{a}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)+\frac{a}{\sqrt{2}}\left(y-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)+b\left(z-b\frac{\pi}{4}\right)=0$$

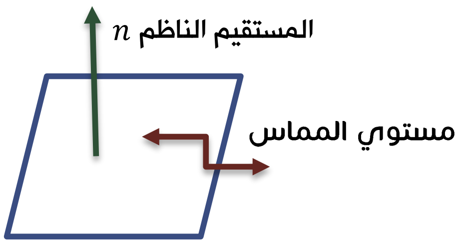
السطح:

الخواص الهندسية للسطح في الفراغ:

السطح الصقيل (الأملس): **هو عبارة عن سطح يملك كل نقطة من نقاطه ناظم وحيد وهذا الناظم يتغير باستمرار بتغير النقطة على السطح. وتعطى نسب توجيه المستقيم الناظم على السطح ويرمز له بالرمز**

حيث أن: $\vec{n}\left(\frac{d(f)}{d(x)},\frac{d(f)}{d(y)},\frac{d(f)}{d(z)}\right)$

حيث معادلة السطح هي: $f(x,y,z)=0$



كيف نبرهن أن سطحا ما بأنه صقيل ؟؟

يكفي لذلك بأن نثبت بأن تكون مشتقاته الجزئية معرفة ومستمرة ولا تنعدم

معادلات المستقيم الناظم لسطح في نقطة عادية $M(x_0,y_0,z_0)$:

$$\frac{x-x_0}{\frac{d(f)}{d(x)}}=\frac{y-y_0}{\frac{d(f)}{d(y)}}=\frac{z-z_0}{\frac{d(f)}{d(z)}}$$

أما معادلة المستوي المماس في نقطة عادية $M(x_0,y_0,z_0)$:

$$\frac{d(f)}{d(x)}(x-x_0)+\frac{d(f)}{d(y)}(y-y_0)+\frac{d(f)}{d(z)}(z-z_0)=0$$

مثال

ليكن لدينا السطح المعطى ديكارتيا $F(x,y,z)\equiv x^2+3xy+z^2=4$

أوجد معادلة المستوي المماس ومعادلات المستقيم الناظم في النقطة $M_0(1,-2,1)$ **بعد التأكد من صقالته**

الحل:

$$\frac{d(f)}{d(x)}=2x+3y$$

$$\frac{d(f)}{d(y)}=3x$$

$$\frac{d(f)}{d(z)}=2z$$

تكون المشتقات $\begin{cases}-4\\3\\2\end{cases}$ عندما $M_0(1,-2,1)$ $\Longrightarrow$

نلاحظ أن هذه المشتقات الجزئية عبارة عن توابع صحيحة وهي معرفة ومستمرة وموجودة ولا تنعدم الا من أجل (0,0,0)o ولكن عند تعويض هذه النقطة بالمعادلة الأصلية نجد أنها لا تحققها مما يعني أن السطح صقيل

معادلات المستقيم الناظم: $\frac{x-1}{-4}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{2}$

معادلة المستوي المماسي:

$$-4(x-1)+3(y+2)+2(z-1)=0$$

سؤال دورة:

برهن أنه إذا حدد أي مستوي مماسي للسطح:

$$F(x,y,z)=x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}} \qquad ;a\neq 0$$

الأطوال C ، B،A على محاور الاحداثيات فبرهن أن: $A^2+B^2+C^2=a^2$

ثم أثبت فيما كان المستوي مصقولا أم لا

الحل

نأخذ المشتقات الجزئية

$$\frac{d(f)}{d(x)}=\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}$$

$$\frac{d(f)}{d(y)}=\frac{2}{3}y^{\frac{-1}{3}}$$
$$\frac{d(f)}{d(z)}=\frac{2}{3}z^{\frac{-1}{3}}$$

نلاحظ أن المشتقات الجزئية معرفة ومستمرة ماعدا القيم التي تعدم المقام (كون الأسس سالبة فانهم يقعون في المقام) اذن النقطة $O(0,0,0)$ نقطة شاذة ولكن هذه النقطة لا تحقق معادلة المستوي فهي غير موجودة على المستوي المطلوب إذا المستوي مصقول

لنكتب معادلة المستوي المماس في نقطة ما منه ولتكن (x_0, y_0, z_0)

$$\frac{2}{3}x_0^{\frac{-1}{3}}(x-x_0)+\frac{2}{3}y_0^{\frac{-1}{3}}(y-y_0)+\frac{2}{3}z_0^{\frac{-1}{3}}(z-z_0)=0$$
$$xx_0^{\frac{-1}{3}}+yy_0^{\frac{-1}{3}}+zz_0^{\frac{-1}{3}}-\left(x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}+z_0^{\frac{2}{3}}\right)=0$$
$$\underbrace{\left(x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}+z_0^{\frac{2}{3}}\right)}_{=\,a^{\frac{2}{3}}}$$

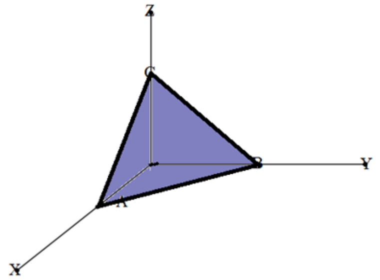
$$xx_0^{\frac{-1}{3}}+yy_0^{\frac{-1}{3}}+zz_0^{\frac{-1}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$

نقسم على $a^{\frac{2}{3}}$ ونجعل القوى موجبة (أي نجعل العناصر ذات القوة السالبة للمقام) فيكون:

$$\frac{x}{\underbrace{x_0^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}}_{A}}+\frac{y}{\underbrace{a^{\frac{2}{3}}y_0^{\frac{1}{3}}}_{B}}+\frac{z}{\underbrace{a^{\frac{2}{3}}z_0^{\frac{1}{3}}}_{C}}=1$$

ان كل مقام يشكل كل من:

لأن معادلة المستوي الذي يحدد على محاور الاحداثيات الشكل التالي يعطى بالعلاقة : $\frac{x}{A}+\frac{y}{B}+\frac{z}{C}=1$



وبالمطابقة بين العلاقتين نجد أنه يجب أن تكون مجموع مربعات المقامات هي a^2

نقوم بتربيع مقامات العلاقة السابقة وجمعها فيكون:

$$x_0^{\frac{2}{3}}a^{\frac{4}{3}} + a^{\frac{4}{3}}y_0^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{4}{3}}z_0^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{4}{3}}\left(x_0^{\frac{2}{3}} + y_0^{\frac{2}{3}} + z_0^{\frac{2}{3}}\right) = a^{\frac{4}{3}}a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$$ و هو المطلوب

الوظيفة:

أوجد معادلة المستقيم المماسي للمنحنيات التالية بعد التأكد من صقالته:

أولا

$$\vec{r} = \begin{cases} \overrightarrow{\mathbf{x_t}} = \mathrm{t}\ \vec{\imath} \\ \overrightarrow{\mathbf{y_t}} = \mathrm{e^t}\ \vec{\jmath} \\ \overrightarrow{\mathbf{z_t}} = (\mathrm{t}^2 + 1)\ \vec{\mathrm{k}} \end{cases}$$

عندما تكون في النقطة $t = 0$

ثانيا

$$\vec{r} = \begin{cases} x = t^4 \\ y = t^2 \\ z = \cos(t) \end{cases}$$

عند نقطة $p(x_0, y_0, z_0)$